

Proposition de thèse

Classification et énumération de triangulations en dimension trois

Le sujet de thèse portera sur l'**énumération de structures discrètes en trois dimensions**, voire plus. Il s'agit d'une généralisation des *cartes combinatoires*. En effet, les cartes combinatoires sont des graphes plongés sur des surfaces de dimension deux (voir le chapitre sur les cartes dans [1]). Elles permettent d'étudier les surfaces en tant qu'objets aléatoires discrets, et notamment leur géométrie.

Une des thématiques de l'équipe **CALIN**, au sein de l'axe **physique combinatoire**, est la généralisation des cartes aux dimensions supérieures, via les triangulations dites *colorées* (voir la revue [2]). Ici le terme triangulations désigne des collages aléatoires de tétraèdres en dimension trois, de pentachores en dimension 4 et plus généralement des collages de simplexes. Les faces de ces simplexes sont colorées et deux simplexes peuvent être collés le long de faces de même couleur uniquement.

L'équipe, en particulier V. Bonzom, a développé des méthodes pour énumérer des familles de telles triangulations par rapport à leur nombre de simplexes et leur nombre de sous-simplexes de codimension deux (voir [3] et la revue [4]). En effet, ce type d'énumération est le plus pertinent pour la physique. Les techniques élaborées ont commencé à être appliquées à certaines familles de triangulations, aboutissant à des résultats d'énumération exacte [5, 6]. De tels comptages sont importants pour déterminer les classes d'universalité de ces familles de triangulations.

La **première phase de la thèse** consistera à se familiariser avec le sujet, cartes combinatoires et triangulations colorées. Cela se fera par la littérature notamment, mais aussi **en participant à l'énumération de certains modèles** de triangulations, en utilisant les techniques développées au sein de l'équipe. De tels résultats auraient déjà une très large portée tant peu de résultats existent au-delà des cartes combinatoires. De plus, ils donneraient une meilleure idée des classes d'universalité de ces triangulations.

Cela aboutira naturellement à la **deuxième phase de la thèse**. Les résultats obtenus lors de la première phase devraient renforcer/infirmer des conjectures qui portent sur de plus larges familles de triangulations, ou bien permettre d'amender ces conjectures. En particulier, le candidat pourra s'intéresser à la dépendance en la dimension. Par exemple, sur la base des seuls cas résolus connus, il semble qu'en dimension trois, dans un certain régime de paramètres, la seule classe d'universalité des triangulations colorées soit celles des arbres aléatoires. Pouvoir prouver cela sur la plus large gamme possible de triangulations sera un objectif ambitieux pour cette thèse.

Pour parvenir à prouver de telles conjectures, on s'attend à ce que l'étudiant trouve de **nouvelles bijections**. En particulier, il s'intéressera à généraliser la bijection de Schaeffer à la dimension trois. Il s'agit d'une bijection entre les cartes combinatoires et des arbres décorés [7]. Cette bijection a largement contribué à la vitalité récente de l'étude des cartes, car les décorations des arbres codent les distances géodésiques de la surface sous-jacente !

Ce projet permettra à l'étudiant d'interagir au sein de l'équipe CALIN avec V. Bonzom et J. Ben Geloun, spécialistes des triangulations colorées, T. Monteil, L. Pournin, A. Sportiello.

-
- [1] I. P. Goulden and D. M. Jackson, "Combinatorial enumeration," Dover books on mathematics, 2004
 - [2] R. Gurau and J. P. Ryan, "Colored Tensor Models - a review," SIGMA **8**, 020 (2012) [arXiv:1109.4812 [hep-th]].
 - [3] V. Bonzom, L. Lionni and V. Rivasseau, "Colored triangulations of arbitrary dimensions are stuffed Walsh maps," preprint arXiv:1508.03805 [math.CO].
 - [4] V. Bonzom, "Large N limits in tensor models: Towards more universality classes of colored triangulations in dimension $d \geq 2$," SIGMA **12** (2016) 073 arXiv:1603.03570 [math-ph].
 - [5] V. Bonzom, T. Delepouve and V. Rivasseau, "Enhancing non-melonic triangulations: A tensor model mixing melonic and planar maps," Nucl. Phys. B **895**, 161 (2015) [arXiv:1502.01365 [math-ph]].
 - [6] V. Bonzom and L. Lionni, "Counting gluings of octahedra," preprint arXiv:1608.00347 [math.CO]
 - [7] J. Bouttier, P. Di Francesco and E. Guitter, "Planar maps as labeled mobiles," Electron. J. Combin. **11** (2004).